සියලුම හිමිකම් ඇවිරිණි / All Rights Reserved

රාජකීය විද්‍යාලය රාජකීය විද්‍යාලය රාජකීය විද්‍යාලය රාජකීය විද්‍යාලය රාජකීය විද්‍යාලය රාජකීය විද්‍යාලය රාජකීය
Royal College Royal College Royal College Royal College Royal College Royal College Royal

රාජකීය විද්‍යාලය - කොළඹ 07

Royal College - Colombo 07

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2022 (2023)

General Certificate of Education (Adv.Level) Examination, 2022 (2023)

සංයුක්ත ගණිතය II		10	S	II
Combined Mathematics II				

B කොටස

ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11 a. තිරස් ගෙබිමක පිහිටි O අචල ලක්ෂ්‍යයක සිට ආරම්භක u ප්‍රවේගයකින් අංශුවක් සිරස්ව ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. අනතුරුව $\frac{u}{3g}$ කාලයකට පසුව අංශුව මත වන සිරස් ආවේගයක් හේතුවෙන් එහි ප්‍රවේගය ක්ෂණිකව දෙගුණ වේ. තවත් $\frac{u}{3g}$ කාලයකට පසුව නැවතත් එහි ප්‍රවේගය ක්ෂණිකව දෙගුණ වන බව දී ඇත.

අංශුව ප්‍රක්ෂේපිත ස්ථානයට නැවත ළඟාවන තුරු එහි චලිතය සඳහා වන ප්‍රවේග කාල වක්‍රය අඳින්න.
ඒනයින්,

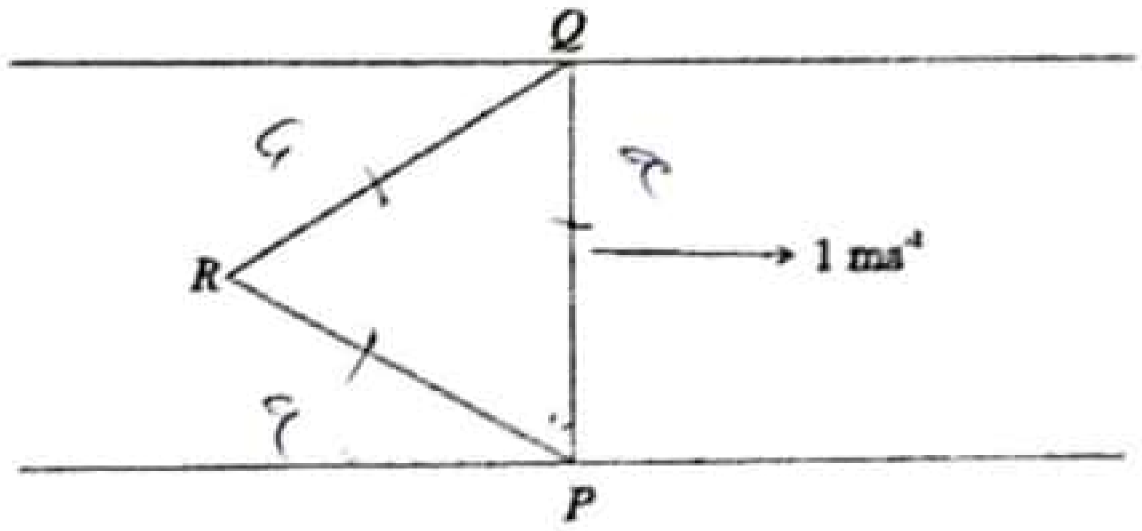
i. ප්‍රක්ෂේප කළ මොහොතේ සිට $\frac{5u}{3g}$ කාලයකට පසු අංශුවේ ප්‍රවේගය u වන බව පෙන්වන්න.

මෙවිට අංශුවට O හි සිට සිරස් උස $\frac{39u^2}{18g}$ ද බව පෙන්වන්න.

ii. අංශුව ළඟාවන උපරිම උස $\frac{8u^2}{3g}$ බව පෙන්වන්න.

iii. අංශුව නැවත O වෙත ළඟා වීමට ගතවන මුළු කාලය $\left(2+\sqrt{3}\right)\frac{4u}{3g}$ බව පෙන්වන්න.

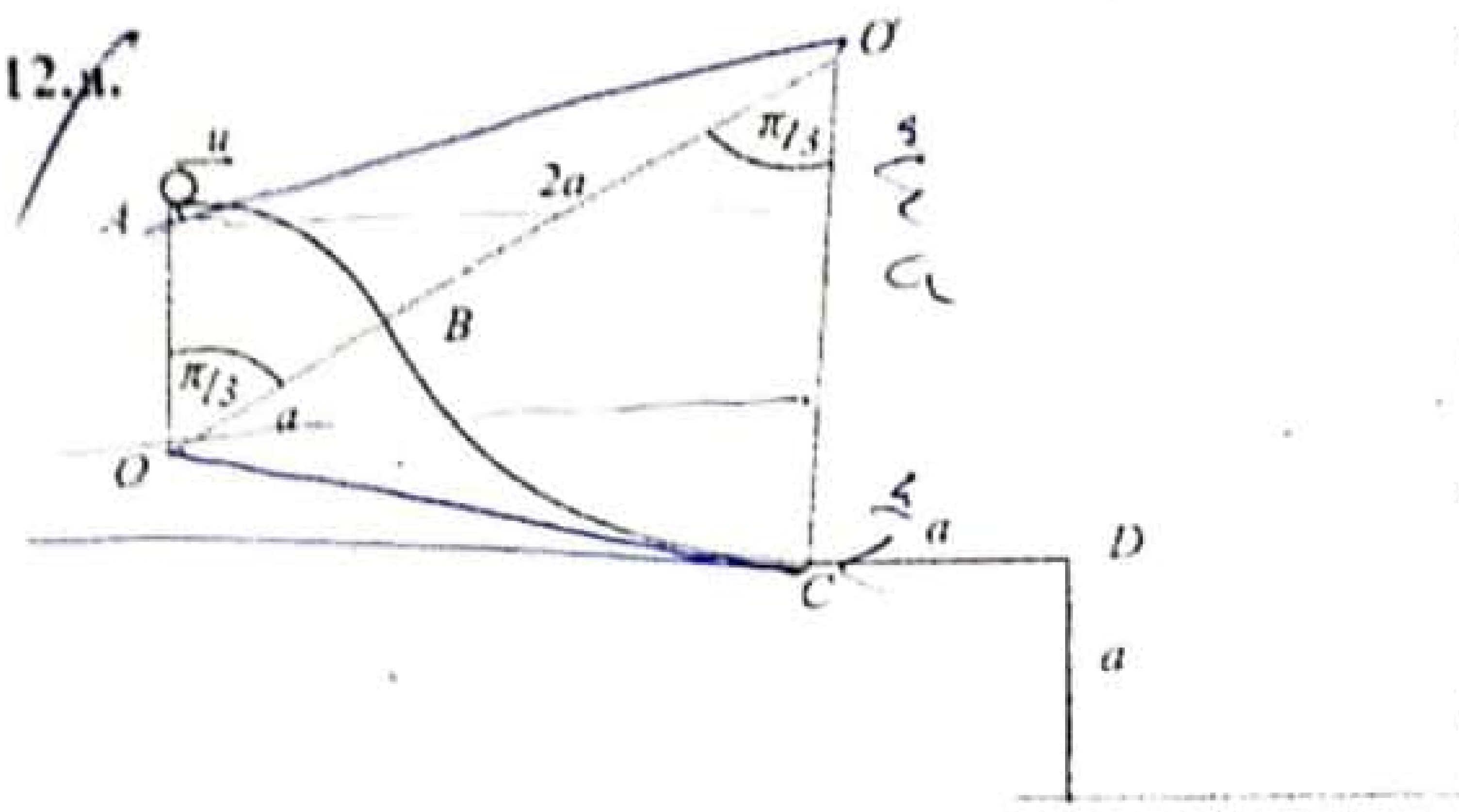
b. පළල මීටර a වූ ඍජු ගඟක් ඒකාකාර $1\ \text{ms}^{-1}$ ක වේගයකින් ගලා යයි. ගඟ ගලන දිශාවට PQ රේඛාව ලම්බක වන පරිදි P හා Q ලක්ෂ්‍යය ගඟේ ප්‍රතිවිරුද්ධ ඉවුරුවල පිහිටා තිබේ. තවද PQR සමපාද ත්‍රිකෝණයක් වන පරිදි PQ ගෙන් උඩු ගං අතට R අචල බෝයාවක් ගඟ මැද සවිකර ඇත.



ජලයට සාපේක්ෂව $v(>1)\text{ms}^{-1}$ වේගයෙන් චලනය වන බෝට්ටුවක් P සිට ආරම්භ කර R වෙත ළඟාවන තෙක් චලනය වේ. නැවත එය R සිට Q දක්වාත් චලනය වේ. P සිට Q දක්වාත්, R සිට Q දක්වාත් බෝට්ටුවේ චලිත සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ අඳින්න. P සිට R දක්වා චලිතයේදී බෝට්ටුවේ වේගය $\frac{1}{2}\left(\sqrt{4v^2-1}-\sqrt{3}\right)$ බව පෙන්වා, R සිට Q දක්වා චලිතයේදී එහි වේගය සොයන්න. **ඒනයින්,** PR හා RQ පෙත් සඳහා බෝට්ටුව ගන්නා මුළු කාලය $\frac{\sqrt{4v^2-1}}{v^2-1}\cdot a$ බව පෙන්වන්න.

22 A/L අපි [papers group]

12. (a)



රූපයේ දැක්වෙන්නේ ජල ක්‍රීඩා උද්‍යානයක් සඳහා නිර්මාණය කිරීමට නියමිත ජල රූටනයක (water slide) ආකෘතියකි. AB, O කේන්ද්‍රයෙහි $\frac{\pi}{3}$ කෝණයක් ආපාතනය කරන අතර BC, O' කේන්ද්‍රයෙහි $\frac{\pi}{3}$ කෝණයක් ආපාතනය කරයි. $OB = a$ හා $O'B = 2a$ වේ. CD යනු a දිගැති **තිරස්** කොටසක් වන අතර D නාන තටාකයට a සිරස් උසකින් පිහිටයි. A හි තබන ලද ස්කන්ධය m වූ අංශුවට u තිරස් ප්‍රවේගයක් ලබා දුන්විට අංශුව පථය දිගේ ගමන් කරන්නේ යැයි අපේක්ෂිතයි.

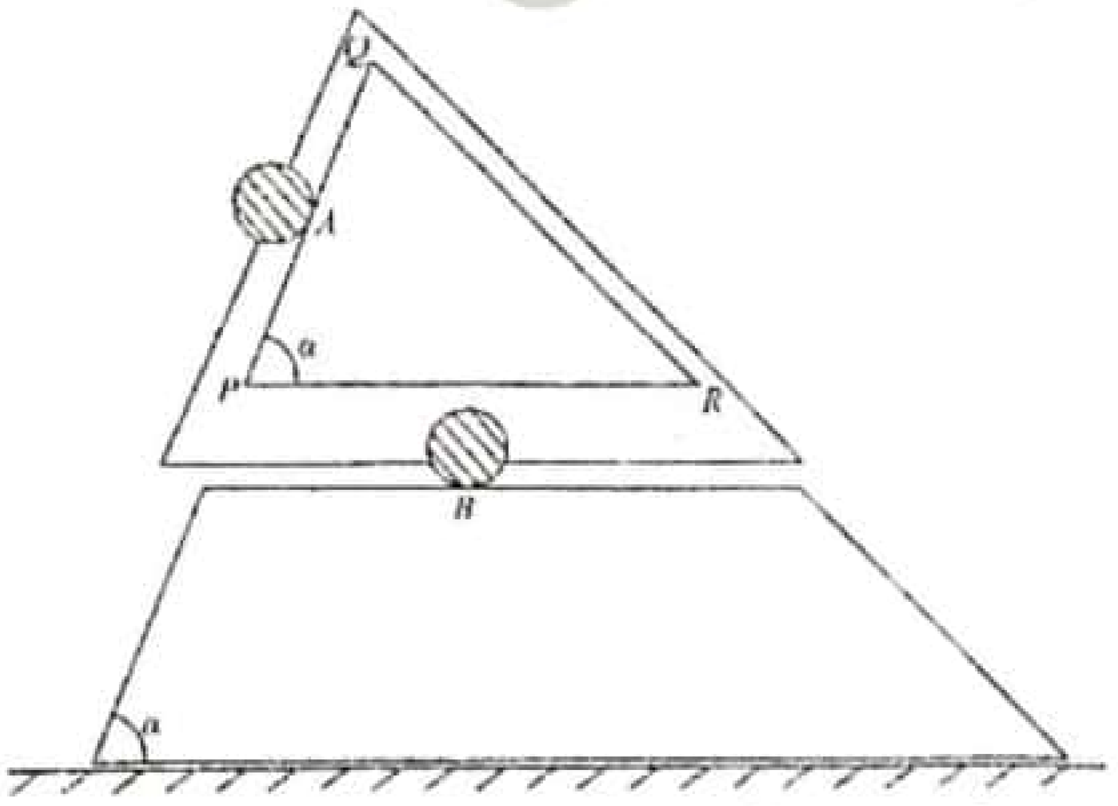
i. අංශුව OA සමඟ $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$ කෝණයක් සාදන විට අංශුවේ ප්‍රවේගය, $v^2 = u^2 - 2ag(\cos\theta - 1)$ මගින් ලබාදෙන බව පෙන්වා එම අවස්ථාවේදී අංශුව මත පථය මගින් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. **ඒනයින්,** අංශුව වෘත්ත චලිතය ආරම්භ කිරීම සඳහා $u^2 < ag$ විය යුතු බව පෙන්වන්න.

ii. C හි දී අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයා, D හිදී එය නිශ්චල වීම සඳහා CD කොටසේදී තලය මගින් ඇති කල යුතු ඒකාකාර ප්‍රතිරෝධී බලය $\frac{m}{2a}\left(u^2 + 3ag\right)$ බව පෙන්වන්න.

iii. ආරම්භක ප්‍රවේගය $u = \sqrt{ag}$ ද CD හි ප්‍රතිරොධී බලය පෙර බලයෙන් හරි **අඩක්** ද වුනි නම්, අංශුව D සිට තිරස් $2a$ දුරකදී තටාකයට පතිත වන බව පෙන්වන්න.

22 A/L අපි [papers group]

(b) සුමට තිරස් මේසයක් මත වන ස්කන්ධය $6m$ වූ සුමට කුඤ්ඤයක එක් මුහුණතක් තිරසට α කෝණයක් ආනත වේ. යා බද රූපයේ පරිදි කුඤ්ඤයේ ප්‍රතිවිරුද්ධ මුහුණත් හරහා තිරස් සුමට උමඟක් හාරා ඇත්තේ කේන්ද්‍රික හරස්කඩ පිහිටි සිරස් තලයේ උමඟ පිහිටන පරිදිය. ස්කන්ධය m වන A අංශුවක් α ආනත වූ මුහුණත මත ද ඊට සර්වසම තවත් B අංශුවක් සුමට උමඟ තුල ද තබා රූපයේ පරිදි APB හා $AQRB$ ලුහු තන්තු දෙකකින් නොබුරුල්ව ගැට ගසා තිබේ.



A අංශුවට QP දිශාවට ද, B අංශුවට PR දිශාවට ද, පද්ධතියට තිරස් දිශාවට ද චලිත සමීකරණ ලියා දක්වන්න. **ඒනයින්,** කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව අංශුවල ත්වරණ $\frac{8g\sin\alpha}{(3+\cos\alpha)(5-\cos\alpha)}$ බව පෙන්වන්න.

තවද APB තන්තුව කැඩී ගියහොත් $AQRB$ තන්තුවේ ආතතිය $\frac{mg(7+\cos\alpha)\sin\alpha}{(3+\cos\alpha)(5-\cos\alpha)}$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

13. දිග $3l$ ට වඩා වැඩි ඝර්ෂණ බලය $\frac{mg}{4}$ වන රළු ආනත තලයක් තිරසට 30° ක ආනතියකින් යුක්තව අචලව සවිකර තිබේ. ආනත තලයේ වැඩිතම බෑවුම් රේඛාව මත ඉහළම පිහිටි ලක්ෂ්‍යය O වන අතර ස්භාවික දිග l ද ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය mg ද වූ තන්තුවක එක් කෙළවරක් O හි ගැටගසා අනික් කෙළවරට ස්කන්ධය m වන P අංශුවක් ඈඳා තිබේ. ආරම්භයේදී P අංශුව O හි තබා $\sqrt{\frac{5gl}{2}}$ ප්‍රවේගයෙන් පහළට තලය දිගේ ප්‍රක්ෂේප කරයි.

i. O සිට තලය දිගේ l දුරක් පහළින් පිහිටි A ලක්ෂ්‍යයට අංශුව පළමු වරට ළඟා වන විට එහි වේගය සොයන්න.

ii. කාලය t වන විට තන්තුවේ මුළු දිග x යැයි ගනිමු. මෙහි $t \geq t_0$ වන අතර $x \geq l$ වේ. මෙම අවස්ථාවේදී අංශුවේ චලිතය $\ddot{x} = -\frac{g}{l}\left(x - \frac{5l}{4}\right)$ බව පෙන්වන්න.

iii. ඉහත චලිත සමීකරණයේ විසඳුම $x = \frac{5l}{4} + \alpha \cdot \cos\left(w\left(t - t_0\right)\right) + \beta \cdot \sin\left(w\left(t - t_0\right)\right)$ බව උපකල්පනය කරමින් මෙම සරල අනුවර්තිය චලිතයට අනන්‍ය වන α, β හා w නියත සොයන්න.

මෙහි t_0 යනු තන්තුව ආරම්භයේ සිට පළමු වරට තන්තුවට ආතතියක් ඇතිවීමට ගතවන කාලයයි.

iv. ඉහත සමීකරණය භාවිතයෙන් රළු ආනත තලය මත P අංශුව ළඟා වන පහළම ලක්ෂ්‍යයට O සිට ඇති දුර සොයා එම පිහිටීමට ළඟා වීමට ගන්නා කාලය $\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\pi - \tan^{-1}\left(4\sqrt{3}\right) + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{10}\right)$ බව පෙන්වන්න.

v. අංශුව නැවත ඉහළට සිදුකරන චලිතය ද සරල අනුවර්තීය බව පෙන්වා එහි නාභිය සහ විස්තාරය සොයන්න.

vi. පහළම ලක්ෂ්‍යයේ සිට නැවත A වෙත පැමිණීමට ගතවන කාලය $\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(\pi - \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$ බව පෙන්වන්න.

22 A/L අපි [papers group]

14.a. O මූලය අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍යය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් **a** හා **b** වේ. මෙහි O, A හා B ඒක රේඛීය **නොවේ**. C යනු $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ ද D යනු $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ද වන පරිදි පිහිටි ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු.

$\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}(3\mathbf{a} - \mathbf{b})$ බවත්, $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}(3\mathbf{a} - \mathbf{b})$ බවත්, පෙන්වන්න.

P හා Q යනු පිළිවෙලින් AB හා OD මත $\overrightarrow{AP} = (1-k)\overrightarrow{AB}$ හා $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OD}$ වන පරිදි පිහිටි ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. මෙහි $o < k < 1$ වේ. $\overrightarrow{PC} = \frac{1}{3}\left((3k-2)\mathbf{b} - 3k\mathbf{a}\right)$ බව පෙන්වන්න. තවදුරටත් $PC : CQ = 2 : 1$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

Scanned with CamScanner

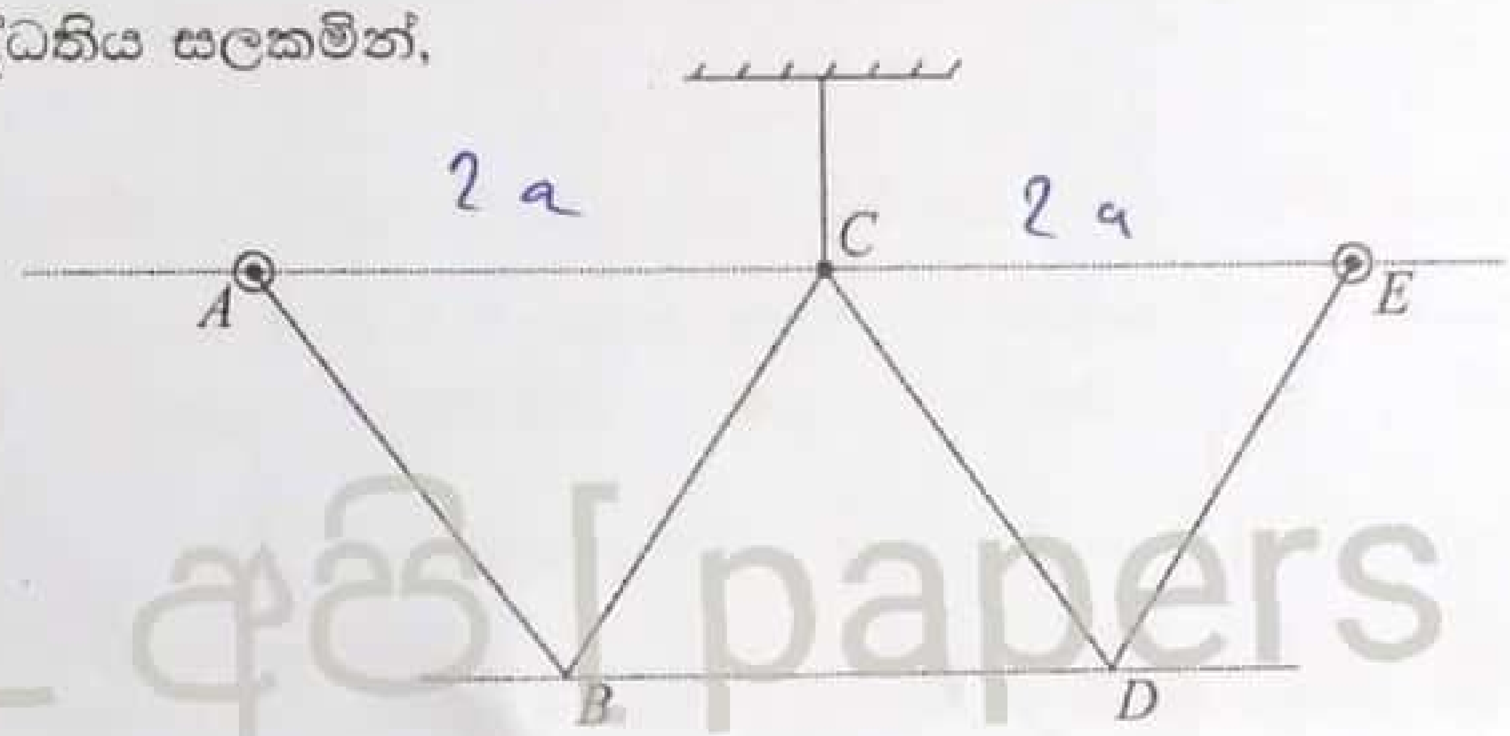
b. $ABCD$ යනු පැත්තක දිග $2a$ හා $BD=2a$ වූ රොම්බසයක් යැයි ගනිමු. රොම්බසයේ විකර්ණ O ලක්ෂ්‍ය හිදී හමුවේ. විශාලත්ව $\alpha P, \beta P, 4P, 8P$ හා $6P$ වූ බල පිළිවෙලින් AB, BC, DC, DA හා BD දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙලින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරයි. $\overrightarrow{OC}$ හා $\overrightarrow{OD}$ දිශාවලට බල පද්ධතියේ විභේදන පිළිවෙලින් $2\sqrt{3}P$ හා αP බව දී ඇත්නම් α හා β සොයන්න. සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව BC ට **සමාන්තර** වන බව පෙන්වන්න.

සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාවට E ලක්ෂ්‍යයේ දී දික් කරන ලද AB හමුවේනම්, $BE=\alpha a$ බව පෙන්වන්න.

දැන් බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය AD ඔස්සේ වන පරිදි පද්ධතියට G යුග්මයක් එකතු කරනු ලැබේ. G හි විශාලත්වය හා අත සොයන්න.

15.a. AB, BC, CD හා DE යනු දිග $2a$ බැගින් වූද බර පිළිවෙලින් $w, 3w, 2w$ හා $2w$ වූද ඒකාකාර දඬු හතරකි. ඒවා B, C හා D හිදී **සුමටව** සන්ධිකර A හා E එකම තිරස් මට්ටමේ පිහිටි අචල ලක්ෂ්‍ය දෙකකට අසව් කර ඇත්තේ $AC=CE=2a$ වන පරිදිය. තවද A, C, E **ඒක රේඛීය** වන පරිදි C සන්ධිය රූපයේ පරිදි තන්තුවකින් එල්ලා රාමුවේ හැඩය පවත්වා ගනී.

මෙම සමතුලිත පද්ධතිය සලකමින්,

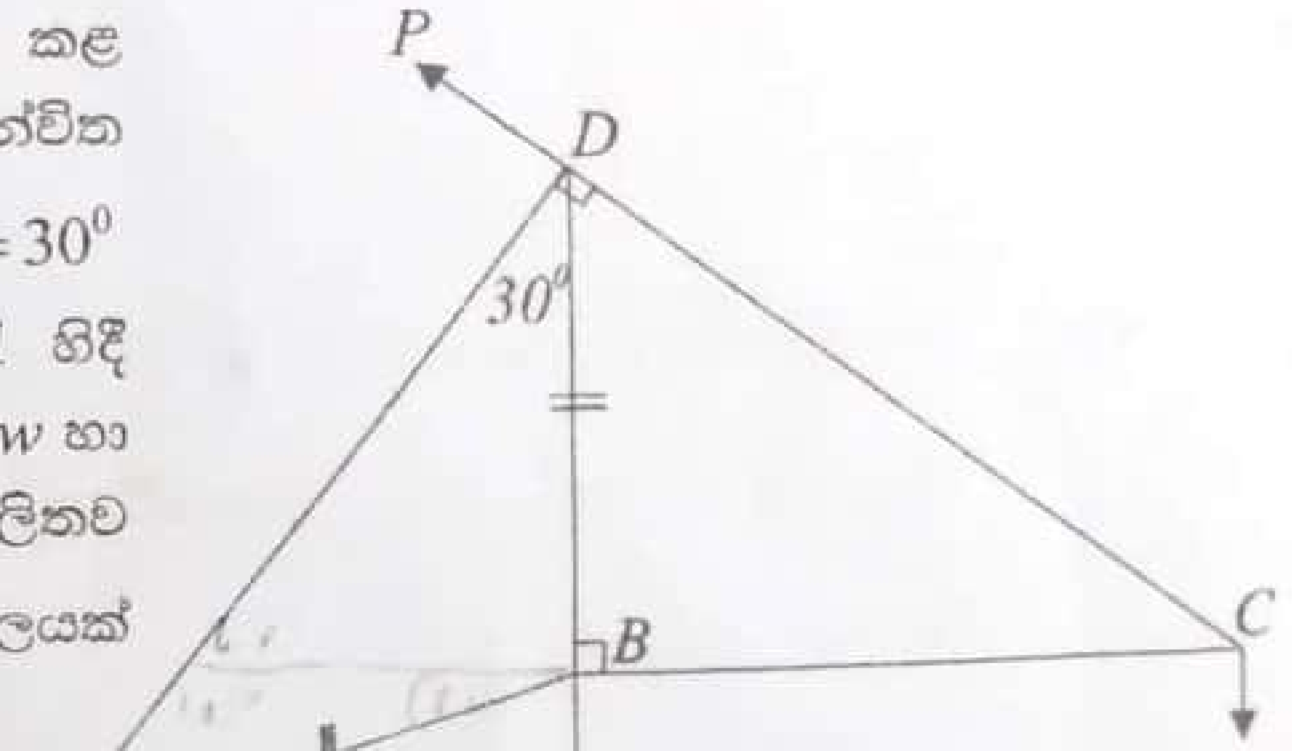


22 A/L අපි [papers group]

i. B හා D සන්ධිවල ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න.

ii. A හා E අසව්වල සිරස් හා තිරස් ප්‍රතික්‍රියා සංරචක සොයන්න.

b. යාබද රූපයෙන්, අන්තවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කළ AB, BC, CD, AD හා BD සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත රාමු සැකිල්ලක් නිරූපණය වේ. මෙහි $AB=BD, A\hat{D}B=30^0$ බවත්, BC **තිරස්** බවත් දී ඇත. මෙම රාමු සැකිල්ල A හිදී සුමට අසව් කර ඇති අතර B හා C හි දී පිළිවෙලින් $3w$ හා w භාර දරයි. රාමු සැකිල්ල එකම සිරස් තලයක සමතුලිතව පවත්වා ගනු ලබන්නේ D හිදී $\overline{CD}$ දිශාවට වන P බලයක් මගිනි.

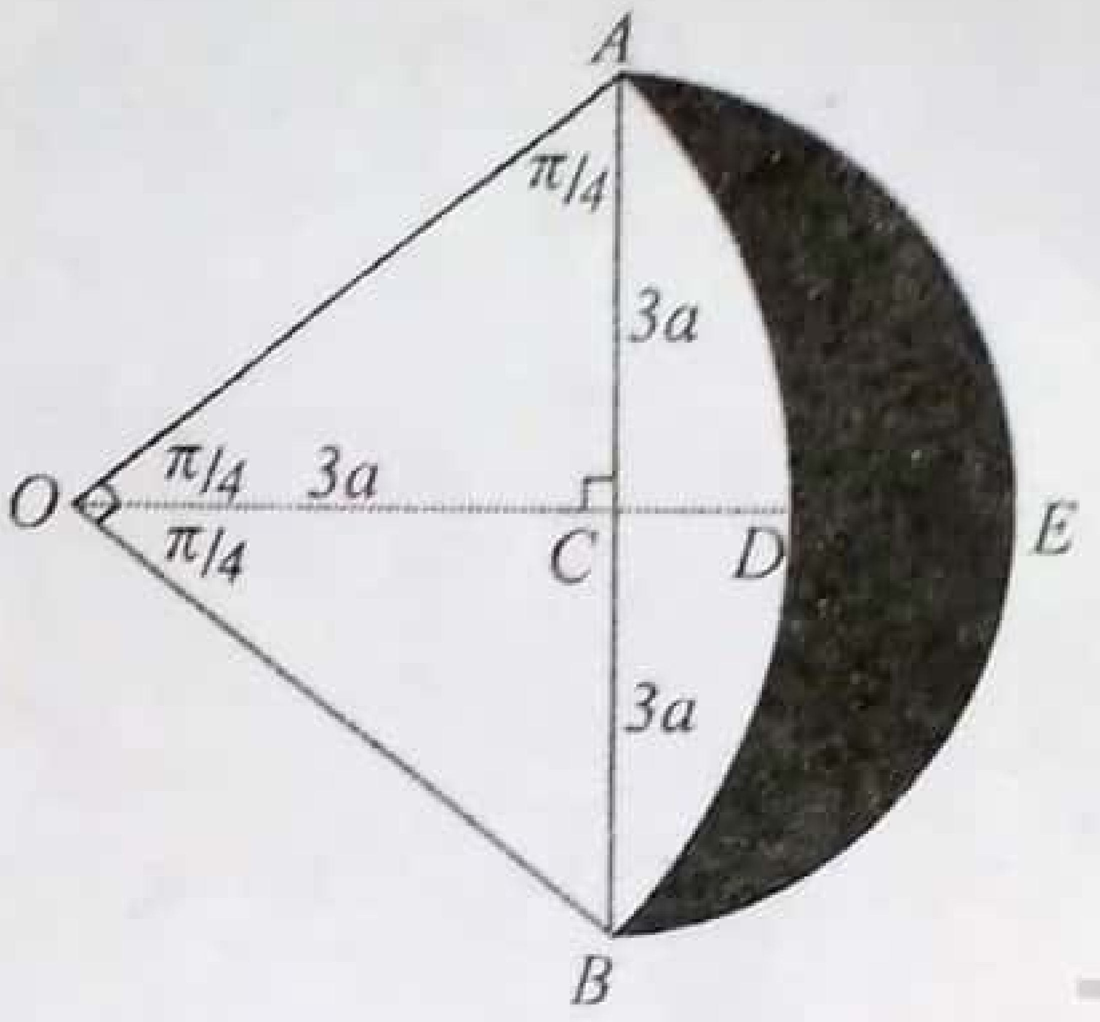


i. P හි විශාලත්වය සොයන්න.

ii. බෝ අංකනය භාවිතයෙන්, B, C හා D සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහන් එකම රූපයක අඳින්න. **ඒනයින්,** සියලුම දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ආතති හා තෙරපුම් ලෙස වෙන් වෙන්ව දක්වමින් ඒවායේ විශාලත්ව සොයන්න.

iii. A සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාවද සොයන්න.

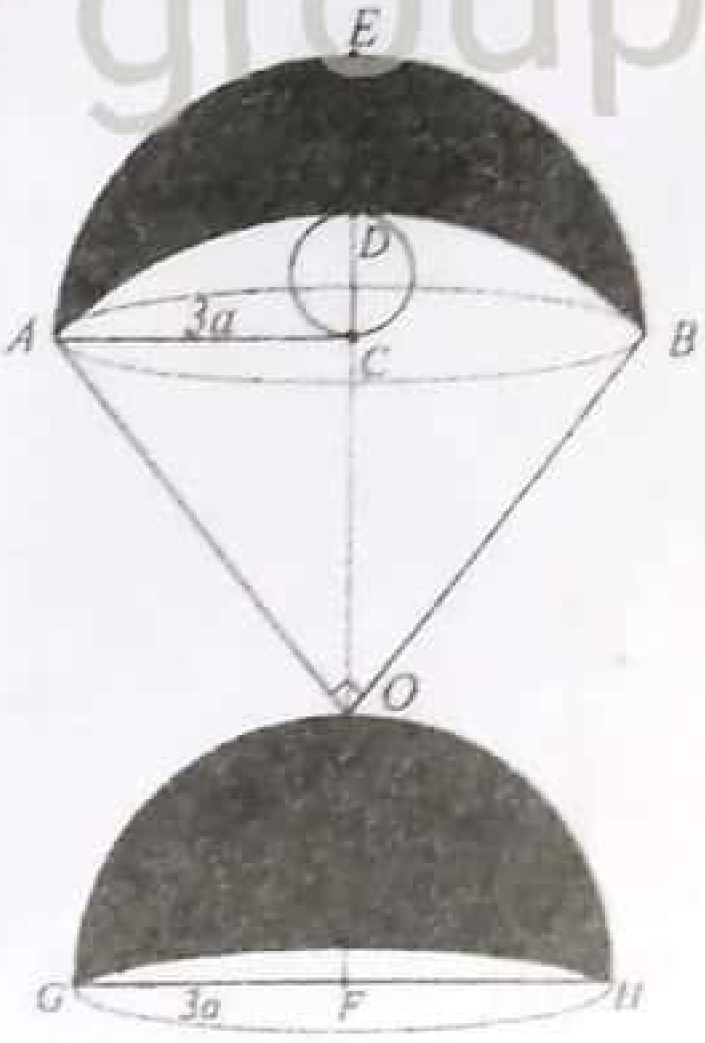
16.a. වෘත්ත කේන්ද්‍රය O වන අරය a වූද, කේන්ද්‍රකෝණය 2α වූද කේන්ද්‍රික බන්ධ ආස්තරයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, O සිට $\frac{2a}{3}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ දුරකින් පිහිටන බව සාධනය කරන්න.



යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි තුනී ලෝහමය ළසදක් නිර්මාණය කර ඇත්තේ $ABEA$ අර්ධ වෘත්තාකාර කොටසින් $OADBO$ වෘත්ත පාදක කොටස ඉවත් කිරීමෙනි. මෙම අර්ධ වෘත්තයේ අරය $3a$ බව දී ඇත්නම්, ළසදෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{3\pi a}{2}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

22 A/L අපි [papers group]

b. එක්තරා ආයතනයකට පහත රූපයේ දැක්වෙන පරිදි කුසලානයක් නිර්මාණය කරගත යුතුව තිබේ. මෙහි $FO = OC = CE = 3a$ වේ. $AB = GH = 6a$ වේ. මෙම කුසලානය නිර්මාණය කිරීමේදී ඒ ඒ වස්තු සඳහා එකිනෙකට වෙනස් පදාර්ථ යොදා ඇති අතර එවිට අර්ධ ගෝලය, කේතුව, වෘත්ත ආස්තරය හා ළසදෙහි ස්කන්ධ අතර අනුපාතය $6:6:2:1$ වන පරිදි වේ. කුසලානයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය FE සමමිතික රේඛාව මත F සිට $\frac{\left(38+2\sqrt{2}+\pi\right)a}{10}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



දැන් ඉහත කුසලානය අර්ධ ගෝල ආධාරක මුහුණත ස්පර්ශවන පරිදි රළු ආනත තලයක තබා ඇතැයි සිතමු. පෙරළීමට ආසන්නතම මොහොතක දී ඉහත කුසලානය සමතුලිතව ඇත්තේ ලිස්සීමද වළක්වමිනි. මේ සඳහා ආනත තලයේ ආනතිය $\tan^{-1}\left(\frac{30}{38+2\sqrt{2}+\pi}\right)$ බව පෙන්වන්න.

17.a. නොනැඹුරු ඝනකාකාර A දාදු කැටයක් එහි වෙන් වෙන් මුහුණත් හය මත $2,3,4,5,5,6$ පෙන්වයි. A දාදු කැටය දෙවරක් උඩ දමනු ලැබේ. ලැබුණු සංඛ්‍යා දෙකෙහි ඓක්‍යය 8 වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. මුහුණත් මත වූ සංඛ්‍යා හැරුණු විට, අන් සෑම අයුරකින්ම A ට සර්වසම තවත් B දාදු කැටයක් එහි වෙන් වෙන් මුහුණත් හය මත $2,2,4,4,5,6$ පෙන්වයි. B දාදු කැටය දෙවරක් උඩ දමනු ලැබේ. ලැබුණු සංඛ්‍යා දෙකෙහි ඓක්‍යය 8 වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

දැන් A හා B දාදු කැට දෙක පෙට්ටියක දමනු ලැබේ. එක් දාදු කැටයක් සසම්භාවී ලෙස පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගෙන දෙවරක් උඩ දමනු ලැබේ. ලැබුණු සංඛ්‍යා දෙකෙහි ඓක්‍යය 8 බව දී ඇති විට, පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගත් දාදු කැටය, A දාදු කැටය වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

b. පහත දැක්වෙන සමූහිත ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය 50 වන පරිදි f_1 හා f_2 සංඛ්‍යාත ගණනය කරන්න.

පන්ති ප්‍රාන්තර	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	මුළු ගණන
සංඛ්‍යාතය	17	f_1	32	f_2	19	120

තවද ව්‍යාප්තියේ මාතය, මධ්‍යස්ථය හා සම්මත අපගමනය ගණනය කරන්න. තවද කුටිකතා සංගුණකය 0.13 බව පෙන්වන්න.